



Colle du 12/04 - Sujet 1
Dénombrement et probabilités

Question de cours. Énoncer et démontrer le théorème de Weierstrass

Exercice 1. Dans un jeu de 32 cartes on pioche deux cartes et on considère les événements A : « obtenir au moins un as » et B : « obtenir au moins un carreau ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 2. On possède $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N . L'urne k possède k boules blanches et $N - k$ boules noires. On pioche n fois dans la même urne.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche à l'étape $n + 1$ sachant que l'on a obtenu que des boules blanches lors des n précédents tirages.
2. Donner la limite de la probabilité précédente.



Colle du 12/04 - Sujet 2
Dénombrement et probabilités

Question de cours. Déterminer le nombre de parties de E .

Exercice 1. On possède 5 jetons blancs et 4 jetons noirs. On pioche sans remise 4 jetons uniformément. Quelle est la probabilité d'avoir pioché 2 jetons blancs puis deux jetons noirs dans cet ordre ?

Exercice 2. On possède une pièce retournant pile avec une probabilité de $1/3$ et de deux dés : un dé A ayant 4 faces rouges et 2 faces blanches et un dé B ayant 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance la pièce. Si l'on tombe sur pile, alors on lance à deux reprises le dé A et si l'on tombe sur face, on lance deux fois le dé B . La probabilité d'avoir obtenu la face rouge au second lancer est-elle indépendante de la probabilité d'avoir obtenu la face rouge au premier lancer ?



Colle du 12/04 - Sujet 3
Dénombrement et probabilités

Question de cours. Montrer que \mathbb{P}_B est une probabilité.

Exercice 1. Soient E un ensemble à n éléments, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $p = \text{Card}(A)$.

1. Calculer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = A$.
2. En déduite $\sum_{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \text{Card}(X \cap Y)$.

Exercice 2. Un fumeur tente d'arrêter de fumer. Le jour n s'il a arrêté de fumer, il a une probabilité $1/2$ le jour suivant de recommencer à fumer. Et s'il fumait le jour n , il a une probabilité $1/4$ d'arrêter de fumer le jour suivant. On note p_n la probabilité que notre individu fume le jour n .

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
2. En déduire une expression de p_n en fonction de n et p_0 .
3. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$?



Colle du 12/04 - Sujet 4
Dénombrement et probabilités

Question de cours. Démontrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Montrer $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2y + z, x + z, -x + y + z) \end{matrix}$ est un automorphisme.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.
2. Que peut-on en déduire si E est de dimension finie ?